МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
**«МУРМАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**



Кафедра математики, информационных систем и программного обеспечения

**Методические указания к практическим занятиям и контрольной работе**
по дисциплине " **Планирование эксперимента и обработка результатов** "
для специальности **04.04.01 Химия**
для магистров очной формы обучения

Мурманск
2019 г.

**Оглавление**

# ВВЕДЕНИЕ

**Целью дисциплины «Планирование эксперимента и обработка результатов»** является формирование у студентов направления подготовки 04.04.01 «Химия», компетенций, необходимых для осуществления научно-исследовательской деятельности по решению фундаментальных и прикладных задач профессиональной деятельности.

Данные методические указания по освоению дисциплины «**Планирование эксперимента и обработка результатов**» содержат методические рекомендации к практическим работам и к самостоятельной работе студентов.

**Целью практических работ в процессе изучения дисциплины является:**

– систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;

– углубление и расширение теоретических знаний;

– формирование умений использовать справочную и специальную литературу;

– развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;

– формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;

– развитие исследовательских умений.

Объем времени, отведенный на практические занятия, определяется в соответствии с учебным планом специальности и рабочей программой учебной дисциплины.

**Основные формы проведения практических работ:**

– для овладения знаниями: публичное обсуждение студентами во время практического занятия основных особенностей и свойств изучаемых в курсе задач и методов их решения и др.;

– для закрепления и систематизации знаний: подготовка студентами сообщений к выступлению на практическом занятии, проводимом в форме семинара;

– для формирования умений: практическое решение задач с помощью изучаемых в курсе методов, содержательный сравнительный анализ получаемых результатов.

Практические занятия проводятся с группами студентов.

**Контроль работы студентов на практической работе** осуществляется в пределах времени, отведенного на практические занятия по дисциплине с предоставлением студентами фактических результатов выполнения практических заданий.

В качестве форм и методов контроля результатов работы студентов на практических занятиях могут быть использованы тестирование, самоотчеты, контрольные работы и др.

**Критерием оценки результатов работы студента на практических работах являются:**

– умение студента использовать теоретические знания при выполнении практических задач;

– обоснованность и четкость изложения ответа;

– оформление материала в соответствии с требованиями.

## ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

| Темы практических работ | Очная |
|---|---|
| | |
| 1. Основные понятия и принципы планирования эксперимента. Типы экспериментов. Этапы планирования эксперимента. Точность результатов эксперимента. | 4 |
| 2. Обработка результатов экспериментов. Их достоверность. | 4 |
| 3. Статистический анализ экспериментальных данных | 6 |
| 4. Статистика малых выборок | 4 |
| 5. Проверка статистических гипотез и критериев. | 6 |
| 6. Корреляционно-регрессионный анализ | 6 |
| 7. Дисперсионный анализ | 6 |
| Итого: | 36 |

## СОДЕРЖАНИЕ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ РАБОТАМ

***Тема 1-2. Основные понятия и принципы планирования эксперимента. Типы экспериментов. Этапы планирования эксперимента. Точность результатов эксперимента. Обработка результатов экспериментов. Их достоверность.***

Изучив данную тему, студент должен:

***знать:***

- основные понятия и определения: эксперимент, опыт, план эксперимента, планирование эксперимента, фактор , уровень фактора, активный эксперимент, пассивный эксперимент, последовательный эксперимент, функция отклика, оценка функции отклика, дисперсия оценки функции отклика.

***уметь:***

- строить факторное пространство эксперимента;
- выбирать такой план эксперимента, который позволил бы получить наиболее достоверное значение функции отклика при фиксированном числе опытов.

Вопросы для самопроверки.

1. Что такое эксперимент, классификация экспериментов
2. Что называется факторным пространством эксперимента?
3. Что такое уровень фактора?
4. Что называется центром плана и интервалом варьирования фактора?
5. Чем отличается пассивный эксперимент от активного?
6. В каком случае эксперимент называют идеальным?
7. Чем отличается стратегическое планирование от тактического?
8. Что такое функция отклика?

Форма практического занятия: устный опрос

***Тема 3-4.* Статистический анализ экспериментальных данных. Статистика малых выборок.**

Изучив данную тему, студент должен:

***знать:***

- понятие выборочного метода;
- статистическое распределение выборки;
- дискретные и интервальные вариационные ряды;
- графическое изображение вариационных рядов;
- абсолютные и относительные показатели;
- средние;
- показатели вариации;
- числовые характеристики выборки;
- точечные и интервальные оценки параметров статистического распределения;
- дискретные и интервальные вариационные ряды;

***уметь:***

- строить дискретные и вариационные ряды;

- строить полигоны и гистограммы частот.
- находить точечные и интервальные оценки параметров статистического распределения выборки;

Вопросы для самопроверки.

1. Что называется генеральной совокупностью?
2. Что называется выборкой (выборочной совокупностью)?
3. Что называется объемом выборки и выборочными характеристиками?
4. Как определяется вариационный ряд?
5. Как определяется статистический ряд для дискретной случайной величины?
6. Как производится группирование статистических данных для непрерывной случайной величины?
7. Как строится гистограмма частот?
8. Какой смысл имеет гистограмма частот?
9. Какой вид имеет статистическая (эмпирическая) функция распределения?
10. Что такое статистическая оценка и какова ее основная особенность?
11. Какая оценка называется точечной?
12. Как определяется несмещенная оценка и смещенная оценка?
13. Как определяется состоятельная оценка?
14. Как находится точечная оценка математического ожидания?
15. Как формулируются теоремы о несмещенности и состоятельности точечной оценки математического ожидания?
16. Как находится точечная оценка дисперсии случайной величины?
17. Как формулируется теорема о смещенности выборочной дисперсии?
18. Что такое исправленная выборочная дисперсия и исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение?
19. Какая оценка называется интервальной?
20. Что называется доверительным интервалом, доверительными границами и доверительной вероятностью?
21. В чем заключается смысл интервальной оценки?
22. Какое распределение используют при интервальном оценивании математического ожидания нормально распределенной случайной величины при известной дисперсии?
23. Какое распределение используют при интервальном оценивании дисперсии нормально распределенной случайной величины?
24. Какое распределение используют при интервальном оценивании математического ожидания нормально распределенной случайной величины при неизвестной дисперсии?

## *Примерные задания для решения на практических занятиях.*

**Задание 1.** При анализе воздуха на содержание азота хроматографическим методом для двух серий опытов получены следующие результаты:

| № серии | Результат определения азота в воздухе, % по объему | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 77,95 | 78,08 | 77,90 | 77,92 | 78,10 | 78,05 | 78,07 | 77,99 |
| 2 | 78,08 | 78,13 | 78,02 | 78,16 | 78,20 | 78,26 | 78,14 | 78,23 |

Рассчитать среднее значение концентрации компонента и его доверительный интервал для каждой серии результатов.

**Задание 2.** Из генеральной совокупности, распределенной по нормальному закону, сделана выборка. Найти: 1) числовые характеристики выборки – выборочную среднюю, выборочную дисперсия, выборочное среднее квадратическое отклонение; 2) несмещенные оценки для генеральной средней и генеральной дисперсии; 3) доверительный интервал для оценки генеральной средней с заданной надежностью γ.

| $x_i$ | 54-58 | 58-62 | 62-66 | 66-70 | 70-74 | 74-78 | 78-82 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 12 | 16 | 22 | 24 | 12 | 10 | 4 |

$\gamma = 0{,}93$

***Тема5.* Проверка статистических гипотез и критериев.**
Изучив данную тему, студент должен:
***знать:***

- этапы проверки статистических гипотез;
- что такое ошибки первого и второго рода; мощностью критерия;
- методы проверки статистических гипотез;
- Как проверить гипотезу о виде распределения генеральной совокупности критерий согласия $\chi^2$ Пирсона;

***уметь:***

- уметь проверять статистические гипотезы о параметрах распределения; о законе распределения.

Вопросы для самопроверки.

1. Что называется критерием, уровнем значимости, критической областью и областью допустимых значений критерия?
2. Что такое ошибки первого и второго рода?
3. Что называется мощностью критерия?
4. Сформулируйте этапы проверки статистических гипотез.
5. Как проверить гипотезу о виде распределения генеральной совокупности?
6. Как проверить гипотезу о равенстве генеральных средних в различных случаях?
7. Как проверить гипотезу о равенстве генеральных дисперсий?
8. Как проверить гипотезу о некоррелированности двух генеральных совокупностей?

## *Примерные задания для решения на практических занятиях.*

**Задание 1.** Массовую долю (%) оксида меди в минерале определили методом иодометрии и методом комплексометрии. По первому методу получили результаты: 38,20; 38,00; 37,66, а по второму: 37,70; 37,65; 37,55. Проверить, различаются ли средние результаты данных методов на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$, если известно, что результаты измерений имеют нормальный закон распределения с неизвестными, но равными дисперсиями.

**Задание 2.** Группа студентов из 20 человек провела анализ воздуха хроматографическим методом на с держание компонента $O_2$ Для дальнейшего расчета были отобраны 10 результатов. Оценить характер распределения наблюдаемых результатов анализа двумя способами.

| V % | 19 | 19,05 | 19,1 | 19,15 | 19,2 | 19,25 | 19,3 | 19,35 | 19,4 | 19,45 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 1 | 11 | 1 | 1 | 2 | 2 | 4 | 3 | 1 | 3 |

***Тема 6.*** **Корреляционно-регрессионный анализ**

Изучив данную тему, студент должен:
***знать:***

- основы корреляционного анализа (корреляционная связь, линейная регрессия *Y* на *X*, коэффициент корреляции, корреляционное отношение);

***уметь:***

- находить выборочные уравнения регрессии Y/X и X/Y с использованием метода наименьших квадратов и с использованием коэффициента линейной корреляции;

Вопросы для самопроверки.

1. Какие цели преследуются при изучении зависимости между переменными?
2. Какие виды связей между переменными вы знаете?
3. Что означает функциональная зависимость?
4. Что означает корреляционная связь?
5. Приведите примеры корреляционной связи между переменными.
6. Что означает коэффициент корреляции Пирсона?
7. Приведите примеры графиков зависимостей между переменными с разными коэффициентами корреляции.
8. Принцип регрессионного анализа?
9. Объясните смысл уравнения регрессии и линии регрессии.
10. Что означает уровень значимости корреляции?

## *Примерные задания для решения на практических занятиях.*

**Задание 1.** Была исследована зависимость признака $Y$ от признака $X$. В результате проведения 10 измерений были получены результаты, представленные в таблице.
Требуется: 1) оценить тесноту и направление связи между признаками с помощью коэффициента корреляции и оценить значимость коэффициента корреляции на уровне значимости $\alpha$; 2) найти уравнение линейной регрессии $Y$ на $X$; 3) в одной системе координат построить эмпирическую и теоретическую линии регрессии.

| $x_i$ | 9 | 12 | 13 | 14 | 15 | 17 | 18 | 19 | 21 | 23 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 69 | 73 | 95 | 87 | 96 | 98 | 105 | 111 | 107 | 129 |

Уровень значимости $\alpha = 0{,}01$.

**Задание 2.** Рассчитать коэффициент корреляции величин, наблюдаемых при амперометрическом титровании раствором тиосульфата натрия йода, выделившегося в результате взаимодействия KI с сульфатом меди.

| | Результаты титрирования | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V, см$^3$ ($Na_2S_2O_3$) | 77,95 | 78,08 | 77,90 | 77,92 | 78,10 | 78,05 | 78,07 | 77,99 |
| I(mA) | 78,08 | 78,13 | 78,02 | 78,16 | 78,20 | 78,26 | 78,14 | 78,23 |

***Тема7* Дисперсионный анализ**

Изучив данную тему, студент должен:

***знать:***

- что такое дисперсионный анализ;
- определение факторных и результативных признаков;
- основную идею дисперсионного анализа;
- что такое межгрупповая, внутригрупповая дисперсия; остаточная и общая дисперсия;

***уметь:***

- уметь проводить дисперсионный анализ

Вопросы для самопроверки.

1. В чем заключается основная идея дисперсионного анализа?
2. Как оценивается межгрупповая вариация?
3. Как оценивается внутригрупповая вариация?
4. На какие компоненты разлагается общая дисперсия при однофакторном анализе?
5. На какие компоненты разлагается дисперсия при двухфакторном анализе?
6. Что характеризует остаточная дисперсия?
7. Приведите процедуру проверки нулевой гипотезы о влиянии фактора на результативный признак при однофакторном дисперсионном анализе.
8. Приведите процедуру проверки нулевой гипотезы о влиянии факторов на результативный признак при двухфакторном дисперсионном анализе.

## *Примерные задания для решения на практических занятиях.*

**Задание 1.** При уровне значимости $\alpha = 0,05$ методом дисперсионного анализа проверить нулевую гипотезу о влиянии фактора на качество объекта на основании пяти измерений для трех уровней фактора Ф1 – Ф3.

| Номер измерения | Ф1 | Ф2 | Ф3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 18 | 24 | 36 |
| 2 | 28 | 36 | 12 |
| 3 | 12 | 28 | 22 |
| 4 | 14 | 40 | 45 |
| 5 | 32 | 16 | 40 |

## ЗАДАНИЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

**Задача 1**.

Вариант 1. При увеличении напряжения может произойти разрыв электрической цепи из-за выхода из строя одного из трех элементов, Вероятности выхода из строя элементов 0,3, 0,4 и 0,5 соответственно. Какова вероятность того, что не будет разрыва сети?

Вариант 2. Радист 3 раза вызывает корреспондента. Вероятность того, что будет принят первый вызов, равна 0,2, второй – 0,3, третий – 0,4. События, состоящие в том, что данный вызов будет услышан, независимы. Найти вероятность того, что корреспондент услышит вызов радиста хотя бы один раз.

Вариант 3. Вероятности своевременного выполнения студентом контрольных работ по каждой из трех дисциплин равны соответственно 0,6, 0,5 и 0,8. Найти вероятность своевременного выполнения студентом контрольных работ по двум дисциплинам.

Вариант 4. Вероятности своевременного выполнения студентом контрольных работ по каждой из трех дисциплин равны соответственно 0,6, 0,5 и 0,8. Найти вероятность своевременного выполнения студентом контрольных работ хотя бы по двум дисциплинам.

Вариант 5. Экспедиция издательства отправила газеты в три почтовых отделения. Вероятность своевременной доставки газет в первое отделение равна 0,95, во второе отделение – 0,85 и в третье – 0,7. Найти вероятность, того, что хотя бы одно отделение получит газеты вовремя.

Вариант 6. Экспедиция издательства отправила газеты в три почтовых отделения. Вероятность своевременной доставки газет в первое отделение равна 0,95, во второе отделение – 0,9 и в третье – 0,8. Найти вероятность, того, что только два отделения получат газеты вовремя.

Вариант 7. Экспедиция издательства отправила газеты в три почтовых отделения. Вероятность своевременной доставки газет в первое отделение равна 0,9, во второе отделение – 0,95 и в третье – 0,85. Найти вероятность, того, что только одно отделение получит газеты вовремя.

Вариант 8. По цели стреляют из трех орудий. Вероятность попадания для первого орудия равна 0,9, для второго – 0,8, для третьего – 0,7. Найти вероятность того, что только два орудия попадут в цель.

Вариант 9. По цели стреляют из трех орудий. Вероятность попадания для первого орудия равна 0,9, для второго – 0,8, для третьего – 0,6. Найти вероятность того, что только одно орудие попадет в цель.

Вариант 10. По цели стреляют из трех орудий. Вероятность попадания для первого орудия равна 0,6, для второго – 0,8, для третьего – 0,7. Найти вероятность того, что хотя бы одно орудие попадет в цель.

**Задача 2.**

В каждом варианте для заданной случайной величины $\xi$ составить закон распределения, построить многоугольник распределения вероятностей, вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

Вариант 1. Вероятность отказа каждого прибора при проведении испытания равна 0,4, для испытания было отобрано 4 прибора, случайная величина $\xi$ – число приборов, отказавших при проведении испытаний.

Вариант 2. Вероятность совершить покупку для каждого покупателя магазина равна 0,3, в магазин пришли 4 покупателя, случайная величина $\xi$ – число покупателей, совершивших покупку.

Вариант 3. По многолетним статистическим данным известно, что вероятность рождения мальчика равна 0,515, случайная величина $\xi$ – число мальчиков в семье из 4 детей.

Вариант 4. Вероятность того, что корреспондент примет вызов радиста, равна 0,4, случайная величина $\xi$ – число вызовов, принятых корреспондентом, если радистом было передано 4 вызова.

Вариант 5. В рекламных целях торговая фирма вкладывает в единицу товара денежный приз размером 1 тыс. руб., случайная величина $\xi$ – размер выигрыша при четырех сделанных покупках, если вероятность выигрыша в каждой покупке равна 0,1.

Вариант 6. В контрольной работе 4 задачи, вероятность правильного решения учеником каждой задачи 0,7, случайная величина $\xi$ – число правильно решенных задач.

Вариант 7. Торговый агент имеет четырех потенциальных покупателей, вероятность того, что потенциальный покупатель сделает заказ, равна 0,4, случайная величина $\xi$ – число покупателей, сделавших заказ.

Вариант 8. Студент должен сдать в сессию 4 экзамена, вероятность успешной сдачи каждого экзамена 0,7, случайная величина $\xi$ – число экзаменов, которые сдал студент в сессию.

Вариант 9. Телевизионный канал рекламирует новый вид детского питания. Вероятность того, что телезритель увидит эту рекламу, оценивается в 0,2. В случайном порядке выбраны четыре телезрителя, случайная величина $\xi$ – число лиц, видевших рекламу.

Вариант 10. Вероятность того, что расход электроэнергии в продолжение одних суток не превысит установленной нормы, равна 0,75, контроль расхода электроэнергии производится в течение четырех суток, случайная величина $\xi$ – число дней, в которые расход электроэнергии был выше установленной нормы.

**Задача 3**

Вариант 1. Значения теста IQ (коэффициента интеллекта) Стэнфорда – Бине распределены приблизительно по нормальному закону с математическим ожиданием $a = 100$ и средним квадратическим отклонением $\sigma = 16$. Найти вероятность того, что коэффициент интеллекта у случайно отобранного для тестирования человека окажется меньше 95.

Вариант 2. Заряд охотничьего пороха отвешивается на весах. Вес заряда - нормально распределенная случайная величина с параметрами $a$ = 2,3 г и $\sigma$=150 мг. Найти вероятность повреждения ружья при выстреле, если максимально допустимый вес заряда пороха равен 2,5 г.

Вариант 3. Размер детали подчинен нормальному закону с параметрами $a$= 30 см и $\sigma$= 5 см. Детали считаются годными, если их размер находится в пределах от 20 до 40 см. Если размер детали больше 40 см, то она подлежит переделке. Найти вероятность того, что случайно отобранная деталь подлежит переделке.

Вариант 4. Значения теста IQ (коэффициента интеллекта) Стэнфорда – Бине распределены приблизительно по нормальному закону с математическим ожиданием $a = 100$ и средним квадратичным отклонением $\sigma = 16$. Найти вероятность того, что коэффициент интеллекта у случайно отобранного для тестирования человека окажется в пределах от 80 до 120.

Вариант 5. Средняя длина взрослой рыбы оценивается в 65 см. со стандартным отклонением в 5 см. Считая распределение длины рыбы нормальным, найдите вероятность того, что длина конкретной рыбы будет больше 70 см.

Вариант 6. Спортсмен бросает копье. Дальность полета копья – нормально распределенная случайная величина со средним значением 70 м и средним квадратическим отклонением $\sigma$=5 м. Найти вероятность того, что дальность полета копья будет от 65 до 72 м.

Вариант 7. На рынок поступила крупная партия говядины. Предполагается, что вес туш – случайная величина, подчиняющаяся нормальному закону распределения с математическим ожиданием $a$ =950 кг и средним квадратическим отклонением $\sigma$=150 кг. Определить вероятность того, что вес случайно отобранной туши будет между 800 и 1300 кг.

Вариант 8. Текущая цена акции может быть смоделирована с помощью нормального закона распределения с математическим ожиданием 15 ден. ед. и средним квадратическим отклонением 0,2 ден. ед. Найти вероятность того, что цена акции будет не выше 15,3 ден. ед.

Вариант 9. Текущая цена акции может быть смоделирована с помощью нормального закона распределения с математическим ожиданием 15 ден. ед. и средним квадратическим отклонением 0,2 ден. ед. Найти вероятность того, что цена акции будет в интервале от 14,9 до 15,3 ден. ед.

Вариант 10. На рынок поступила крупная партия говядины. Предполагается, что вес туш – случайная величина, подчиняющаяся нормальному закону распределения с математическим ожиданием $a = 950$ кг и средним квадратическим отклонением $\sigma$=150 кг. Найти вероятность того, что вес случайно отобранной туши окажется больше 1250 кг.

**Задача 4.**

Из генеральной совокупности, распределенной по нормальному закону, сделана выборка. Найти: 1) числовые характеристики выборки – выборочную среднюю, выборочную дисперсия, выборочное среднее квадратическое отклонение; 2) несмещенные оценки для генеральной средней и генеральной дисперсии; 3) доверительный интервал для оценки генеральной средней с заданной надежностью γ.

Вариант 1.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 54-58 | 58-62 | 62-66 | 66-70 | 70-74 | 74-78 | 78-82 |
| $n_i$ | 12 | 16 | 22 | 24 | 12 | 10 | 4 |

$\gamma = 0{,}93$.

Вариант 2

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 154-158 | 158-162 | 162-166 | 166-170 | 170-174 | 174-178 | 178-182 |
| $n_i$ | 10 | 14 | 26 | 28 | 12 | 8 | 2 |

$\gamma = 0{,}94$.

Вариант 3.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 0-200 | 200-300 | 300-400 | 400-500 | 500-600 | 600-700 |
| $n_i$ | 3 | 5 | 9 | 14 | 8 | 3 |

$\gamma = 0{,}97$.

Вариант 4.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 33,2 | 38,2 | 43,2 | 48,2 | 53,2 |
| $n_i$ | 1 | 2 | 18 | 3 | 1 |

$\gamma = 0{,}92$.

Вариант 5.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 15,4 | 18,4 | 21,4 | 24,4 | 27,4 |
| $n_i$ | 2 | 4 | 11 | 5 | 3 |

$\gamma = 0{,}96$.

Вариант 6.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 15 | 20 | 16 | 17 | 19 | 18 |
| $n_i$ | 3 | 9 | 2 | 7 | 6 | 8 |

$\gamma = 0{,}91$.

Вариант 7.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 4 - 9 | 9 - 14 | 14 - 19 | 19 - 24 | 24 - 29 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 5 | 9 | 13 | 6 | 7 |

$\gamma = 0{,}98$.

Вариант 8.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 12,4 | 16,4 | 20,4 | 24,4 | 28,4 | 32,4 | 36,4 |
| $n_i$ | 5 | 15 | 40 | 25 | 8 | 4 | 3 |

$\gamma = 0{,}93$.

Вариант 9.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 1,7– 2,8 | 2,8– 3,9 | 3,9-5,0 | 5,0-6,1 | 6,1-7,2 | 7,2-8,3 |
| $n_i$ | 8 | 10 | 22 | 10 | 6 | 4 |

$\gamma = 0{,}97$.

Вариант 10.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 3 - 7 | 7 - 11 | 11- 15 | 15 - 19 | 19 - 23 |
| $n_i$ | 1 | 5 | 11 | 7 | 3 |

$\gamma = 0{,}94$

**Задача 5.**

Имеются две нормально распределенные генеральные совокупности $X$ и $Y$, из которых были сделаны выборки. По полученным выборкам на уровне значимости $\alpha$ проверить гипотезу $H_0:\ \bar{x}_0 = \bar{y}_0$, считая дисперсии неизвестными, но равными.

Вариант 1.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 51 | 44 | 47 | 24 | 43 | 34 | 60 |
| $y_i$ | 40 | 38 | 37 | 52 | 42 | | |

Уровень значимости $\alpha = 0{,}05$, альтернативная гипотеза $H_1 : \bar{x}_0 \neq \bar{y}_0$

Вариант 2.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 113 | 120 | 113 | 109 | 111 | 102 | 116 |
| $y_i$ | 97 | 104 | 105 | 103 | 122 | 128 | 113 |

Уровень значимости $\alpha = 0{,}04$, альтернативная гипотеза $H_1 : \bar{x}_0 > \bar{y}_0$

Вариант 3.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 49 | 51 | 46 | 49 | 56 | | |
| $y_i$ | 57 | 58 | 50 | 51 | 46 | 39 | 67 |

Уровень значимости $\alpha = 0{,}06$, альтернативная гипотеза $H_1 : \bar{x}_0 < \bar{y}_0$

Вариант 4.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 35 | 65 | 50 | 46 | | | |
| $y_i$ | 38 | 33 | 37 | 65 | 78 | 66 | 31 |

Уровень значимости $\alpha = 0{,}05$, альтернативная гипотеза $H_1 : \bar{x}_0 \neq \bar{y}_0$

Вариант 5.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 58 | 56 | 53 | 53 | 56 | 52 | 52 |
| $y_i$ | 50 | 54 | 51 | 56 | 53 | 70 | 68 |

Уровень значимости $\alpha = 0{,}1$, альтернативная гипотеза $H_1 : \bar{x}_0 < \bar{y}_0$

Вариант 6.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 93 | 94 | 93 | 92 | 90 | 65 | 87 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 93 | 92 | 103 | 95 | | | |

Уровень значимости $\alpha = 0{,}01$, альтернативная гипотеза $H_1 : \bar{x}_0 \neq \bar{y}_0$

Вариант 7.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 35 | 34 | 47 | 46 | | | |
| $y_i$ | 65 | 45 | 34 | 53 | 68 | 70 | 70 |

Уровень значимости $\alpha = 0{,}015$, альтернативная гипотеза $H_1 : \bar{x}_0 < \bar{y}_0$

Вариант 8.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 99 | 97 | 95 | 94 | 90 | 91 | 89 |
| $y_i$ | 93 | 96 | 94 | 95 | | | |

Уровень значимости $\alpha = 0{,}02$, альтернативная гипотеза $H_1 : \bar{x}_0 \neq \bar{y}_0$

Вариант 9.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 47 | 59 | 61 | 60 | | | |
| $y_i$ | 55 | 55 | 61 | 62 | 67 | 75 | 64 |

Уровень значимости $\alpha = 0{,}01$, альтернативная гипотеза $H_1 : \bar{x}_0 < \bar{y}_0$

Вариант 10.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 16 | 17 | 14 | 8 | 20 | | |
| $y_i$ | 27 | 24 | 18 | 15 | 5 | 7 | 30 |

Уровень значимости $\alpha = 0{,}025$, альтернативная гипотеза $H_1 : \bar{x}_0 < \bar{y}_0$

**Задача 6.**

Была исследована зависимость признака $Y$ от признака $X$. В результате проведения 10 измерений были получены результаты, представленные в таблице.

Требуется: 1) оценить тесноту и направление связи между признаками с помощью коэффициента корреляции и оценить значимость коэффициента корреляции на уровне значимости $\alpha$; 2) найти уравнение линейной регрессии $Y$ на $X$; 3) в одной системе координат построить эмпирическую и теоретическую линии регрессии.

Вариант 1.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 9 | 12 | 13 | 14 | 15 | 17 | 18 | 19 | 21 | 23 |
| $y_i$ | 69 | 73 | 95 | 87 | 96 | 98 | 105 | 111 | 107 | 129 |

Уровень значимости $\alpha = 0{,}01$.

Вариант 2.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 6,0 | 6,5 | 6,8 | 7,0 | 7,4 | 8,0 | 8,2 | 8,7 | 9,0 | 10,0 |
| $y_i$ | 10 | 11 | 12 | 13 | 15 | 17 | 18 | 20 | 20 | 25 |

Уровень значимости $\alpha = 0{,}02$.

Вариант 3.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 39,0 | 38,7 | 38,9 | 40,1 | 39,4 | 39,4 | 39,5 | 39,1 | 40,4 | 39,5 |
| $y_i$ | 4 | 3 | 4 | 6 | 6 | 5 | 4 | 6 | 7 | 5 |

Уровень значимости $\alpha = 0{,}03$.

Вариант 4.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 85 | 88 | 85 | 106 | 100 | 97 | 105 | 106 | 105 | 103 |
| $y_i$ | 45 | 49 | 50 | 56 | 53 | 55 | 56 | 58 | 60 | 62 |

Уровень значимости $\alpha = 0{,}04$.

Вариант 5.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 28 | 25 | 33 | 49 | 32 | 24 | 32 | 24 | 36 | 32 |
| $y_i$ | 34 | 28 | 38 | 47 | 36 | 27 | 28 | 29 | 31 | 37 |

Уровень значимости $\alpha = 0{,}05$.

Вариант 6.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 3,5 | 4,0 | 3,8 | 4,6 | 3,9 | 3,0 | 3,5 | 3,9 | 4,5 | 4,1 |
| $y_i$ | 4,2 | 3,9 | 3,8 | 4,5 | 4,2 | 3,4 | 3,8 | 3,9 | 4,6 | 3,0 |

Уровень значимости $\alpha = 0{,}06$.

Вариант 7.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 7 | 10 | 10 | 12 |
| $y_i$ | 2 | 2 | 3 | 2,5 | 3,5 | 4 | 4 | 5 | 6 | 8 |

Уровень значимости $\alpha = 0{,}07$.

Вариант 8.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 30 | 41 | 52 | 60 | 73 | 80 | 92 | 100 | 112 | 125 |
| $y_i$ | 19 | 25 | 30 | 32 | 37 | 40 | 45 | 47 | 51 | 53 |

Уровень значимости $\alpha = 0{,}08$.

Вариант 9.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 2,8 | 2,2 | 3,0 | 3,5 | 3,2 | 3,7 | 4,0 | 4,8 | 6,0 | 5,4 |
| $y_i$ | 6,7 | 6,9 | 7,2 | 7,3 | 8,4 | 8,8 | 9,1 | 9,8 | 10,6 | 10,7 |

Уровень значимости $\alpha = 0{,}09$.

Вариант 10.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 3,2 | 3,7 | 4,0 | 4,8 | 6,0 | 5,4 | 5,2 | 5,4 | 6,0 | 9,0 |
| $y_i$ | 8,4 | 8,8 | 9,1 | 9,8 | 10,6 | 10,7 | 11,1 | 11,8 | 12,1 | 12,4 |

Уровень значимости $\alpha = 0{,}1$.

**Задача 7.**

Задан процесс Пуассона $X(t)$ с интенсивностью $\lambda$. Найти вероятность того, что за время $t$ событие $A$ произойдет: 1) ровно $k$ раз; 2) меньше, чем $k$ раз; 3) не больше, чем $k$ раз.

| № варианта | | № варианта | |
|---|---|---|---|
| 1 | $\lambda = 3{,}3, \quad t = 2, \quad k = 4$ | 6 | $\lambda = 1{,}6, \quad t = 4, \quad k = 4$ |
| 2 | $\lambda = 2, \quad t = 2{,}5, \quad k = 3$ | 7 | $\lambda = 3{,}4, \quad t = 1{,}5, \quad k = 3$ |
| 3 | $\lambda = 1{,}4, \quad t = 4{,}5, \quad k = 5$ | 8 | $\lambda = 4{,}8, \quad t = 0{,}5, \quad k = 3$ |
| 4 | $\lambda = 1{,}5, \quad t = 4, \quad k = 3$ | 9 | $\lambda = 3{,}6, \quad t = 1{,}5, \quad k = 4$ |
| 5 | $\lambda = 2{,}4, \quad t = 3, \quad k = 5$ | 10 | $\lambda = 2{,}2, \quad t = 3, \quad k = 5$ |

## РЕШЕНИЕ ПРИМЕРНОГО ВАРИАНТА КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

**Задача 1.** По каналу связи передаются три сообщения. Вероятность того, что первое сообщение будет искажено равна 0,1, второе – 0,2, третье – 0,3. Найти вероятности следующих событий: $A$ – все три сообщения переданы без искажения; $B$ – ровно одно сообщение передано без искажения; $C$ – хотя бы одно сообщение искажено.

Решение.

Введем в рассмотрение вспомогательные события $A_k$ – k-ое сообщение передано без искажений, $\overline{A}_k$ – k-ое сообщение искажено, $k = 1,2,3$. Согласно условию $P(\overline{A}_1) = 0,1$, тогда $P(A_1) = 1 - P(\overline{A}_1) = 1 - 0,1 = 0,9$. Аналогично, $P(\overline{A}_2) = 0,2$ и $P(A_2) = 0,8$, $P(\overline{A}_3) = 0,3$ и $P(A_3) = 0,7$.

Так как событие $A$ можно представить в виде $A = A_1A_2A_3$ и события $A_1, A_2, A_3$ независимы, то вероятность события $A$ можно найти по теореме умножения вероятностей для независимых событий:

$$P(A) = P(A_1A_2A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$$

$$P(A) = 0,7 \cdot 0,8 \cdot 0,9 = 0,504.$$

Событие $B$ можно представить следующим образом:

$$B = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3,$$

причем слагаемые $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$, $\overline{A}_1A_2\overline{A}_3$ и $\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$ являются попарно несовместными событиями. Поэтому на основании теоремы сложения вероятностей (1) получаем:

$$P(B) = P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3).$$

Для вычисления вероятностей событий $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$, $\overline{A}_1A_2\overline{A}_3$ и $\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$ используем теорему умножения вероятностей:

$$P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3) = P(A_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(\overline{A}_3) = 0,9 \cdot 0,2 \cdot 0,3 = 0,054;$$

$$P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3) = P(\overline{A}_1) \cdot P(A_2) \cdot P(\overline{A}_3) = 0,1 \cdot 0,8 \cdot 0,3 = 0,024;$$

$$P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3) = P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(A_3) = 0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,7 = 0,014.$$

Таким образом, окончательно получаем:

$$P(B) = 0,054 + 0,024 + 0,014 = 0,092.$$

События $A$ и $C$ являются противоположными, следовательно,

$$P(C) = 1 - P(A) = 1 - 0,504 = 0,496.$$

Ответы: $P(A) = 0,504$, $P(B) = 0,092$, $P(C) = 0,496$.

**Задача 2.** Стрелок ведет стрельбу по цели с вероятностью попадания при каждом выстреле 0,4. За каждое попадание он получает 5 очков, а в случае промаха очков ему не начисляют. Составить закон распределения случайной величины $\xi$ – числа очков, полученных стрелком за 3 выстрела, построить многоугольник распределения, вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

Решение.

Случайная величина $\xi$ может принимать 4 значения:

0 – если стрелок промахнулся 3 раза;

5 – если стрелок попал 1 раз при трех выстрелах;

10 – если стрелок попал 2 раза при трех выстрелах;

15 – если стрелок попал 3 раза.

Так как каждый выстрел можно рассматривать, как независимое испытание, в результате которого возможны только два исхода: попадание («успех») или промах («неудача»), то вероятности, соответствующие каждому значению случайной величины, можно найти по формуле Бернулли (5):

$$P(\xi = m) = P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

По условию задачи имеем: число испытаний $n = 3$, вероятность успеха $p = 0{,}4$, $q = 1 - p = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$, значения $m$ будут изменяться от 0 до 3. Т.о. имеем:

$$p_0 = p(\xi = 0) = C_3^0\, 0{,}4^0 \cdot 0{,}6^3 = 0{,}216,$$

$$p_1 = p(\xi = 5) = C_3^1\, 0{,}4^1 \cdot 0{,}6^2 = 0{,}432,$$

$$p_2 = p(\xi = 10) = C_3^2\, 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^1 = 0{,}288,$$

$$p_3 = p(\xi = 15) = C_3^3\, 0{,}4^3 \cdot 0{,}6^0 = 0{,}064.\text{о}$$

Следовательно, окончательно закон распределения случайной величины $\xi$ будет иметь вид:

| $x_i$ | 0 | 5 | 10 | 15 |
|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,216 | 0,432 | 0,288 | 0,064 |

Построим многоугольник распределения. Для этого по оси абсцисс отложим возможные значения случайной величины, а по оси ординат – соответствующие им вероятности и соединяем точки ($x_i$, $p_i$) отрезками прямых. Полученная при этом ломаная линия и есть многоугольник распределения вероятностей случайной величины $\xi$.

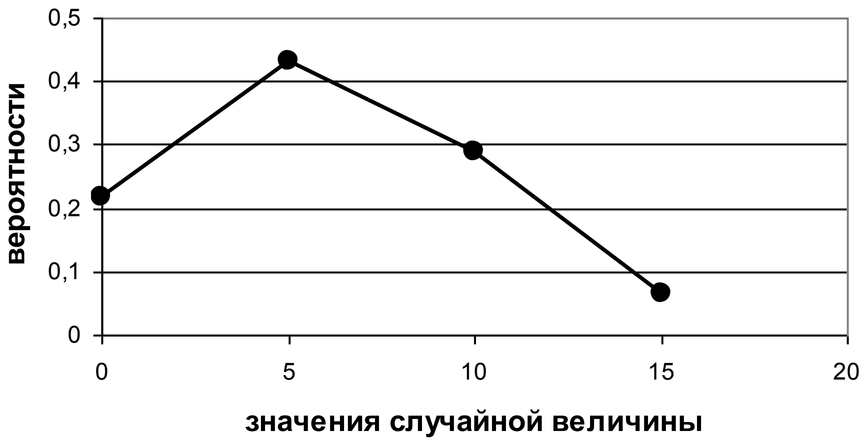


Рис. 1. Многоугольник распределения вероятностей

Рассчитаем числовые характеристики случайной величины $\xi$.

1. Математическое ожидание вычисляем по формуле (7)

$$M\xi = \sum_i x_i p_i = 0 \cdot 0{,}216 + 5 \cdot 0{,}432 + 10 \cdot 0{,}288 + 15 \cdot 0{,}064 = 6.$$

2. Дисперсия вычисляется по формуле (9):

$$D\xi = \sum_i x_i^2 \cdot p_i - (M\xi)^2 = 0^2 \cdot 0{,}216 + 5^2 \cdot 0{,}432 + 10^2 \cdot 0{,}288 + 15^2 \cdot 0{,}064 - 6^2 = 18.$$

3. Среднее квадратическое отклонение

$$\sigma_\xi = \sqrt{D\xi} = \sqrt{18} \approx 4{,}2\,.$$

Ответ. Закон распределения случайной величины $\xi$:

| $x_i$ | 0 | 5 | 10 | 15 |
|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,216 | 0,432 | 0,288 | 0,064 |

многоугольник распределения – на рисунке 1, $M\xi = 6$, $D\xi = 18$, $\sigma_\xi = \sqrt{18} \approx 4{,}2$.

**Задача 3.** Случайная величина $\xi$ распределена по нормальному закону с математическим ожиданием $a = 10$ и дисперсией $\sigma^2 = 4$. Найти вероятность того, что в результате испытания $\xi$ примет значение, заключенное в интервале $(12;14)$.

Решение.

Так как случайная величина $\xi$ имеет нормальное распределение, то вероятность ее попадания в интервал можно найти по формуле (11). Учитывая, что по условию имеем: $\alpha = 12$, $\beta = 14$, $a = 10$, $\sigma^2 = 4$, то получим:

$$P(12 < \xi < 14) = \Phi\left(\frac{14-10}{2}\right) - \Phi\left(\frac{12-10}{2}\right) = \Phi(2) - \Phi(1)\,.$$

По таблице значений функции Лапласа $\Phi(x)$ находим: Ф(2)=0,4772, Ф(1)=0,3413. Значит, получаем: $P(12 < \xi < 14) = 0{,}1359$.

Ответ: $P(12 < \xi < 14) = 0{,}1359$

**Задача 4.** По выборке из генеральной совокупности нормально распределенного количественного признака X найти: 1) числовые характеристики выборки – выборочную среднюю, выборочную дисперсию, среднее квадратическое отклонение; 2) несмещенные оценки для генеральной средней и генеральной дисперсии; 3) доверительный интервал для оценки генеральной средней с надежностью $\gamma = 0{,}99$.

| $x_i$ | 33,2 | 38,2 | 43,2 | 48,2 | 53,2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 2 | 4 | 10 | 3 | 1 |

Решение.

1. Сначала вычислим числовые характеристики выборки.

Выборочную среднюю найдем по формуле (14).

Учитывая, что объем выборки $n = 2 + 4 + 10 + 3 + 1 = 20$, получаем:

$$\bar{x} = \frac{1}{20}(33{,}2 \cdot 2 + 38{,}2 \cdot 4 + 43{,}2 \cdot 3 + 48{,}2 \cdot 3 + 53{,}2 \cdot 1) = 42{,}45\,.$$

Выборочную дисперсию удобнее вычислять по формуле (16):

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{20}(33{,}2^2 \cdot 2 + 38{,}2^2 \cdot 4 + 43{,}2^2 \cdot 3 + 53{,}2^2 \cdot 1) - 42{,}45^2 = 23{,}1875\,.$$

Выборочное СКО:

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} = \sqrt{23{,}1875} \approx 4{,}82\,.$$

2. Несмещенной оценкой для генеральной средней $\bar{x}_0$ является выборочная средняя $\bar{x} = 42{,}45$.

Несмещенной оценкой дисперсии $\sigma_0^2$ генеральной совокупности является исправленная выборочная дисперсия $s_x^2$, которая вычисляется по формуле (17):

$$s_x^2 = \frac{20}{19} \cdot 23{,}1875 \approx 24{,}41.$$

3. Так как генеральная дисперсия $\sigma_0^2$ неизвестна, а известна лишь ее оценка – исправленная выборочная дисперсия $s_x^2$ и данная выборка имеет небольшой объем ($n < 30$), то доверительный интервал для генеральной средней можно найти, используя формулы (19) и (21).

Значение $t_{\gamma,n-1}$ находим по таблице распределения Стьюдента, где $\gamma = 0{,}99$ – доверительная вероятность, $n = 20$ – объем выборки, $n-1=19$ - число степеней свободы.

Учитывая, что $\bar{x} = 42{,}45$, $s_x = \sqrt{24{,}41} \approx 4{,}94$, $t_{0{,}99;19} = 2{,}86$, находим сначала точность оценки по формуле (21):

$$\Delta = 2{,}86 \cdot \frac{4{,}94}{\sqrt{20}} \approx 3{,}16.$$

Теперь искомый доверительный интервал определяем по формуле (19):

$$42{,}45 - 3{,}16 < \bar{x}_0 < 42{,}45 + 3{,}16$$

или $39{,}39 < \bar{x}_0 < 45{,}61$.

Ответы: 1. $\bar{x} = 42{,}45$, $\sigma_x^2 = 23{,}1875$, $\sigma_x \approx 4{,}82$; 2. $\bar{x}_0 \approx \bar{x} = 42{,}45$, $\sigma_0^2 \approx s_x^2 \approx 24{,}41$; 3. $39{,}21 < \bar{x}_0 < 45{,}69$.

**Задача 5.** Массовую долю (%) оксида меди в минерале определили методом иодометрии и методом комплексометрии. По первому методу получили результаты: 38,20; 38,00; 37,66, а по второму: 37,70; 37,65; 37,55. Проверить, различаются ли средние результаты данных методов на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$, если известно, что результаты измерений имеют нормальный закон распределения с неизвестными, но равными дисперсиями.

Решение.

Вычисляем для каждого метода числовые характеристики, учитывая, что объем каждой выборки равен $n_x = n_y = 3$:

- выборочные средние значения по формуле (14):

$$\bar{y} = \frac{1}{n_y} \sum y_i = \frac{1}{3}(37{,}70 + 37{,}65 + 37{,}55) = 37{,}63;$$

- исправленные выборочные дисперсии по формуле (18):

$$s_x^2 = \frac{1}{n_x - 1} \sum (x_i - \bar{x})^2, \quad s_y^2 = \frac{1}{n_y - 1} \sum (y_i - \bar{y})^2$$

$$s_x^2 = \frac{1}{2}((38{,}20 - 37{,}95)^2 + (38{,}00 - 37{,}95)^2 + (37{,}66 - 37{,}95)^2) = 0{,}07453;$$

$$s_y^2 = \frac{1}{2}((37{,}70 - 37{,}63)^2 + (37{,}65 - 37{,}63)^2 + (37{,}55 - 37{,}63)^2) = 0{,}00583.$$

Теперь проверим гипотезу о равенстве средних двух совокупностей.

1. Нулевая гипотеза: $H_0: \bar{x}_0 = \bar{y}_0$.

Альтернативная гипотеза: $H_1: \bar{x}_0 \neq \bar{y}_0$

2. Уровень значимости $\alpha = 0{,}05$.

3. Проверку гипотезы будем проводить с помощью $t$-критерия, так как выборки маленькие и по условию дисперсии генеральных совокупностей неизвестны, но равны. По таблице значений $t_{\gamma,k}$ распределения Стьюдента при $\gamma = 1-\alpha = 1-0{,}05 = 0{,}95$ и числе степеней свободы $k = 3+3-2 = 4$ находим критическое значение: $t_{0,95;4} = 2{,}78$.

4. Рассчитаем эмпирическое значение $t$-критерия, используя формулу (22):

$$t = \frac{37{,}95 - 37{,}63}{\sqrt{\frac{3 \cdot 0{,}07453 + 3 \cdot 0{,}00583}{3+3-2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)}} = 1{,}96.$$

Сравним полученное значение $t$ с табличным значением $t_{0,95;4}$. Так как $|t| < t_{0,95;4}$, то гипотеза $H_0$ принимается.

5. Гипотеза о равенстве средних значений двух методов проверена на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ с помощью $t$-критерия и принята. Следовательно, результаты обоих методов отражают истинное содержание $CuO$ в минерале.

Ответ: гипотеза $H_0$ о равенстве средних проверена на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ с помощью $t$-критерия и принята.

**Задача 6.** Имеются следующие данные об уровне механизации работ $X$ (%) и производительности труда $Y$ (т/чел.) для 14 однотипных предприятий:

| № п/п | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 30 | 32 | 36 | 40 | 41 | 47 | 54 |
| $y_i$ | 24 | 20 | 28 | 30 | 31 | 33 | 37 |

| № п/п | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 55 | 56 | 60 | 61 | 67 | 69 | 76 |
| $y_i$ | 40 | 34 | 38 | 41 | 43 | 45 | 48 |

Требуется: 1) оценить тесноту и направление связи между признаками с помощью коэффициента корреляции и оценить значимость коэффициента корреляции на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$; 2) найти уравнение линейной регрессии $Y$ на $X$; 3) в одной системе координат построить эмпирическую и теоретическую линии регрессии.

Решение.

1. Для удобства проведем все необходимые предварительные расчеты в таблице.

Таблица 1

Расчетная таблица

| № п/п | $x_i$ | $y_i$ | $x_i^2$ | $y_i^2$ | $x_i \cdot y_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 30 | 24 | 900 | 576 | 720 |
| 2 | 32 | 20 | 1024 | 400 | 640 |
| 3 | 36 | 28 | 1296 | 784 | 1008 |
| 4 | 40 | 30 | 1600 | 900 | 1200 |
| 5 | 41 | 31 | 1681 | 961 | 1271 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 47 | 33 | 2209 | 1089 | 1551 |
| 7 | 54 | 37 | 2916 | 1369 | 1998 |
| 8 | 55 | 40 | 3025 | 1600 | 2200 |
| 9 | 56 | 34 | 3136 | 1156 | 1904 |
| 10 | 60 | 38 | 3600 | 1444 | 2280 |
| 11 | 61 | 41 | 3721 | 1681 | 2501 |
| 12 | 67 | 43 | 4489 | 1849 | 2881 |
| 13 | 69 | 45 | 4761 | 2025 | 3105 |
| 14 | 76 | 48 | 5776 | 2304 | 3648 |
| **Всего** | **724** | **492** | **40134** | **18138** | **26907** |

Рассчитаем числовые характеристики выборки, используя итоговую строку расчетной таблицы и учитывая, что объем выборки $n=14$:

- выборочные средние:

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum x_i=\frac{1}{14}\cdot 724=51,71;$$

$$\bar{y}=\frac{1}{n}\sum y_i=\frac{1}{14}\cdot 492=35,14;$$

- средние по квадратам:

$$\overline{x^2}=\frac{1}{n}\sum x_i^2=\frac{1}{14}\cdot 40134=2866,71;$$

$$\overline{y^2}=\frac{1}{n}\sum y_i^2=\frac{1}{14}\cdot 18138=1295,57;$$

- средняя по произведениям:

$$\overline{xy}=\frac{1}{n}\sum x_i y_i=\frac{1}{14}\cdot 26907=1921,93;$$

- выборочные средние квадратические отклонения:

$$\sigma_x^2=\overline{x^2}-\bar{x}^2=2866,71-51,71^2=192,79;\ \sigma_x=\sqrt{192,79}=13,88;$$

$$\sigma_y^2=\overline{y^2}-\bar{y}^2=1295,57-35,14^2=60,75;\ \sigma_y=\sqrt{60,75}=7,79.$$

Вычислим выборочный коэффициент корреляции по формуле (26):

$$r=\frac{1921,93-51,71\cdot 35,14}{13,88\cdot 7,79}=0,970.$$

Т.к. $r>0$ и $r\in(0,9;\,0,99)$, то, следовательно, линейная связь между изучаемыми признаками является прямой и весьма тесной.

Оценим значимость выборочного коэффициента корреляции. Для этого рассчитаем эмпирическое значение $t$-критерия по формуле (26):

$$t_r=0,970\sqrt{\frac{14-2}{1-0,970^2}}=13,8.$$

Для уровня значимости $\alpha=0,05$ и числа степеней свободы $k=n-2=14-2=12$ находим критическое значение $t$-критерия: $t_{0,95;12}=2,18$ по таблице значений $t_{\gamma,k}$ распределения Стьюдента. Поскольку $t>t_{0,95;48}$, то коэффициент корреляции между признаками $X$ и $Y$ является значимым (или значимо отличается от нуля).

2. Найдем уравнение линейной регрессии $Y$ на $X$: $y_x = a_0 + a_1 x$, вычислив параметры уравнения регрессии по формулам (23) и (24):

$$a_1 = \frac{1921{,}93 - 51{,}71 \cdot 35{,}14}{192{,}79} = 0{,}54;$$

$$a_0 = 35{,}14 - 0{,}54 \cdot 51{,}71 = 7{,}22.$$

Следовательно, уравнение прямой регрессии имеет вид:

$$y_x = 0{,}54x + 7{,}22.$$

3) Построим в одной системе координат эмпирическую и теоретическую линии регрессии. Эмпирическая линия – это ломаная, соединяющая точки с координатами $(x_i, y_i)$, а теоретическая – это график прямой регрессии, уравнение которой было получено в п. 2. Теоретическую линию регрессии можно построить по двум точкам, абсциссы которых выбираются произвольно, а ординаты находятся по построенному уравнению регрессии. Найдем координаты точек для построения теоретической линии регрессии: $x_1 = 30$, тогда $y_1 = 0{,}54 \cdot 30 + 7{,}22 = 23{,}42$; $x_2 = 76$, $y_2 = 48{,}26$. Значит, теоретическую линию регрессии будем строить по двум точкам с координатами $(30;48{,}26)$ и $(76;48{,}26)$.

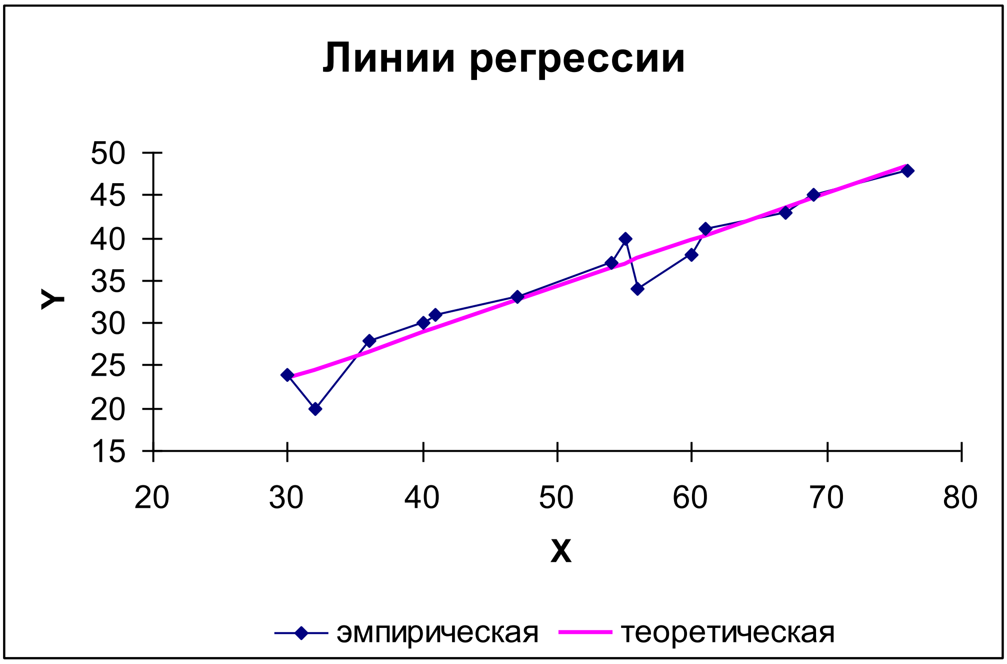


Рис. 2. Эмпирическая и теоретическая линии регрессии

<u>Ответ:</u> 1) $r = 0{,}970$, линейная связь прямая, весьма тесная, коэффициент корреляции значим на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$; 2) выборочное уравнение прямой регрессии $y_x = 0{,}54x + 7{,}22$; 3) линии регрессии представлены на рис. 2.

**<u>Задача 7.</u>** Среднее число заказов такси, поступающих на диспетчерский пункт в одну минуту, равно 3. Найти вероятность того, что за 2 минуты поступит: 1) четыре вызова; 2) менее четырех вызовов; 3) не менее четырех вызовов.

<u>Решение.</u>

Случайные события – заказы такси – представляют собой процесс Пуассона $X(t)$.

По условию имеем: интенсивность потока – среднее число заказов в единицу времени – $\lambda = 3$, промежуток времени $t = 2$.

1) Искомая вероятность того, что за $t=2$ минуты поступит ровно $k=4$ вызова можно вычислить по формуле (28). Имеем:

$$P(X(2)=4)=p_4(2)=\frac{(3\cdot 2)^4}{4!}\cdot e^{-3\cdot 2}\approx 0{,}0025\frac{1296}{24}\approx 0{,}135.$$

2) Событие "поступило менее четырех вызовов" произойдет, если за время $t=2$ мин. наступит одно из следующих несовместных событий: «поступило три вызова» – $k=3$, «поступило два вызова» – $k=2$, «поступил один вызов» – $k=1$, «не поступило ни одного вызова» – $k=0$. Таким образом, искомую вероятность находим с помощью теоремы сложения вероятностей (1):

$$P(X(2)<4)=p_3(2)+p_2(2)+p_1(2)+p_0(2)=$$

$$=\frac{6^3}{3!}\cdot e^{-6}+\frac{6^2}{2!}\cdot e^{-6}+\frac{6^1}{1!}\cdot e^{-6}+\frac{6^0}{0!}\cdot e^{-6}\approx 0{,}1512$$

3) События "поступило не менее четырех вызовов" и "поступило менее четырех вызовов" противоположны, поэтому искомую вероятность того, что за две минуты поступит не менее 4 вызовов, можно найти по формуле (3):

$$P(X(2)\ge 4)=1-P(X(2)<4)\approx 1-0{,}1512=0{,}8488.$$

Ответы: 1) $P(X(2)=4)=p_4(2)\approx 0{,}135$; 2) $P(X(2)<4)\approx 0{,}1512$; 3) $P(X(2)\ge 4)\approx 0{,}8488$

## ПЕРЕЧЕНЬ ОСНОВНОЙ И ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ, НЕОБХОДИМОЙ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ «ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ МАТЕМАТИКИ»

### Основная литература

1. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для вузов / В. Е. Гмурман. - 8-е изд., стер. - Москва : Высш. шк., 2002. - 479 с. : ил. и более ранние издания (361 шт. на абонементе).
2. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учеб. пособие для вузов / В. Е. Гмурман. - 6-е изд., доп. - Москва : Высш. шк., 2002. - 405 с. : ил. и более ранние издания (347 шт. на абонементе).

### Дополнительная литература

3. Письменный Д. Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам / Д. Т. Письменный. - 5-е изд. ; 4-е изд., испр. - Москва : Айрис-Пресс, 2010 ; 2008. – 287 с. : ил. (177 шт. на абонементе).
4. Солодов В. С. Практикум по планированию, проведению и обработке эксперимента в исследовании технологических процессов : учеб. пособие по дисциплине "Планирование эксперимента" направления подгот. 09.06.01 "Информатика и вычислительная техника (уровень подгот. кадров высш. квалификации)" направленность "Автоматизация и управление технологическими процессами и производствами" и направления подгот. 15.04.04 "Автоматизация технологических процессов и производств (уровень магистратуры)" / В. С. Солодов; М-во образования и науки, ФГБОУ ВО "Мурман. гос. техн. ун-т". - Мурманск : Изд-во МГТУ, 2018. - 150 с. : ил. (50 шт. на абонементе).